# TROIS PROBLÈMES SEMBLABLES DE MOYENNE PAS SI SEMBLABLES QUE ÇA ! L'INFLUENCE DE LA STRUCTURE D'UN PROBLÈME SUR LES RÉPONSES DES ÉLÈVES

# THREE SIMILAR MEAN PROBLEMS: ARE THEY REALLY THAT SIMILAR? RESEARCH ON THE INFLUENCE OF THE STRUCTURE OF THE PROBLEM ON STUDENTS' RESPONSES

CLAUDINE MARY
*Université de Sherbrooke*
*Claudine.Mary@Usherbrooke.ca*

LINDA GATTUSO
*Université du Québec à Montréal*
*gattuso.linda@uqam.ca*

## RÉSUMÉ

*Les résultats sont tirés d'une étude plus large sur les stratégies de résolution que des élèves de 2e, 3e et 4e secondaires (14 à 16 ans) utilisent pour résoudre des problèmes de moyenne. Dans ce texte, les résolutions de trois problèmes seront analysées. Ces problèmes ont été composés de telle sorte que nous puissions distinguer entre la capacité des élèves de calculer une moyenne et celle de saisir les liens qu'il y a entre la modification de l'effectif et d'une donnée et celle de la moyenne. Les problèmes visaient aussi à tester l'influence d'une donnée égale à zéro, influence signalée dans les études précédentes. Les résultats de la présente étude font voir que, dans le contexte choisi, le type et le sens des modifications effectuées influencent les comportements des élèves et que des conceptions inadéquates ou des glissements de sens apparaissent dans certaines situations et pas dans d'autres. Note: Un long resume en anglais precede l'article qui est ecrit en francais.*

***Mots-clés:*** *Recherche en enseignement de la statistique; Moyenne arithmétique; Enseignement secondaire*

## ABSTRACT

*The results are taken from a much larger study on the strategies that pupils in the 2nd, 3rd and 4th stages at secondary school (ages 14-16) use for solving problems concerning the mean. In this paper the solutions of three problems are analysed. These problems have been formulated to be of such a kind that we can distinguish between the ability of pupils to calculate a mean, and that of realising the effect of a change in the number of observations or in the value of an observation, on the mean. The problems were also seen to test the influence of a value equal to zero on the*

*Statistics Education Research Journal, 4(2), 82-102, http://www.stat.auckland.ac.nz/serj*

*mean, drawn attention to in earlier research studies. The results of the current study show us, in the chosen context, the type and sense of the modifications exerting influence on the manipulations of the pupils, and that inadequate conceptions or a change of meaning appeared in certain situations and not in others. Note: An extended summary in English is provided at the beginning of this paper, which is written in French.*

***Keywords:*** *Statistics education research; Arithmetic mean; High school*

## EXTENDED SUMMARY

The results presented in this paper are part of a larger study on the strategies used to solve problems of averages by children through their high-school years. In this study we focus on the understanding of the links between a data set and the mean, to see if the pupils perceive that changing even one of the data values affects the mean. We examine also the difficulties encountered by the introduction of a data value equal to zero.

A survey of previous research shows that most pupils and students can understand the mean as a computational construct, but have more difficulty seeing it as a representative value (Cai, 1995; Garfield & Ahlgren, 1988; Gattuso & Mary, 1996; Lappan & Zawojewski, 1988; Leon & Zawojewski, 1990; Pollatsek, Lima & Well, 1981; Strauss & Bichler, 1988) However, some improvement of comprehension with age is observed (Watson & Moritz, 1999, 2000).

Studies on the conceptions of average reveal that existing conceptions (or misconceptions) of representativeness may interfere with the ones introduced in class. For example, some children confuse mode, median and mean (Mokros & Russell, 1995; Johnson, 1985 (see Garfield & Ahlgren, 1988). Watson and Moritz (1999, 2000) show that the concept of mean is far more difficult than mode or median. In the case where one value is zero, pupils or students have problems taking into account the zero value in the computation of the average. Some consider it as the neutral element and assert that it does not change the mean; this fact seems to persist with age (Mevarech, 1983; Strauss & Bichler, 1988).

In this paper, we will analyze in detail the students' responses to three problems that have the same formulation and context but are different as regards the type and direction of the modification of a value equal to zero.

The tasks were framed as three different situations involving modifying the data set by: 1) adding a value equal to zero, 2) replacing a value equal to zero by another and 3) removing one value equal to zero. Two questions were asked: a) Does the average increase, remain unchanged or decrease? b) What is this average? Even though the first question calls for a qualitative answer and the second one does not require complex computations, the numbers were chosen so as to make the calculations easy if ever the pupil found the need to do some.

The three problems:

(1) Adding one value of 0

A group of seven friends empty their pockets. They have an average of $12 each. Jean-Philippe joins the group and does not have a sou, what happens with the average?

(2) Replacing one value by 0

A group of eight friends empty their pockets. They have an average of $11 each. Peter decides to take back his money and go to work. At the same time, Jean-Philippe joins the group but he does not have a sou, what happens to the average?

(3) Removing one value of 0

A group of eight friends empty their pockets. They have an average of $12 each. Peter decides to go to work and leave the group. Anyway he did not have a sou. What happens to the average now that he has left the group?

Approximately one hundred students answered each question (40% grade 8, 40% grade 9 and 20% grade 10). They were 14 to 16 years old.

**RESULTS**

A good proportion of the students did anticipate the effect of the modification on the mean and they used various procedures. When asked to anticipate the effect of adding or removing a value of zero, the students who answered correctly concentrated on the change in the number of values, while when answering the question where a value different from zero is replaced by another equal to zero, they tended to look at the total. When they are asked to calculate the mean (b) they mostly use the formula.

On the other hand, the incorrect responses show different procedures and different degrees of difficulty in the problems. In problems 2 and 3, the relation between data, the number of values and the mean seems to be difficult to rebuild. Problem 3 was more difficult than the others and exposed misconceptions like "zero does not change anything" and "everyone has $12." Considering an equal sharing may be useful in certain situations but it obviously caused a shift of sense here - $12 becomes the amount each person has, and not a made-up amount as a result of a supposed equal sharing. These conceptions don't appear in the answers to problem 1. In problem 2, some confusion between the total and the mean was found.

Misconceptions and shifts (of sense) seem to decrease with age. However, the older students are not better at evaluating the mean when the information is more complicated and seems to be overcome by the grade 8 students. When they are asked to calculate the new mean in version (2) Replacing one value by 0, the grade 8 students (47,4%) succeed better that the grade 9 (30,77%) and even grade 10 (38,46%).

Our results emphasize the difference in behavior following the grade and the problems. These findings suggest that diverse strategies should be confronted so as to explore the link between some more primitive but adequate strategies and other more sophisticated ones. It is necessary to vary the structures of the problems and in this, problems 2 and 3 are particularly interesting for evaluating the understanding. Further research should compare these findings with others in different contexts and different values.

# TROIS PROBLÈMES SEMBLABLES DE MOYENNE PAS SI SEMBLABLES QUE ÇA ! L'INFLUENCE DE LA STRUCTURE D'UN PROBLÈME SUR LES RÉPONSES DES ÉLÈVES

## 1. INTRODUCTION

La moyenne arithmétique est un concept très fréquemment utilisé, depuis longtemps, et non seulement dans le contexte de la statistique. On en retrace la source dans les essais des Babyloniens (500-300 AC) qui prenaient plusieurs mesures du même phénomène. Cependant, ce n'est pas avant les travaux de Tycho Brahé (16e siècle) que l'on voit clairement apparaître la moyenne (Lavoie & Gattuso, 1998). Toutefois, et plusieurs études le montrent, encore aujourd'hui, les élèves ne réussissent pas facilement à maîtriser ce concept.

Cette situation semble vraie à tout âge. Leon et Zawojewski (1990) ont établi que la plupart des élèves peuvent comprendre le calcul de la moyenne mais ont plus de difficultés à la voir comme une valeur représentative. Les enfants ont au point de départ une assez bonne représentation de la moyenne mais elle ne semble pas se développer en une compréhension profonde du concept et les difficultés apparaissent quand le problème demande autre chose qu'un simple calcul de moyenne. Cai (1995) souligne que bien qu'environ 90% d'un échantillon d'élèves de sixième année ait réussi à calculer une moyenne, seulement la moitié a fait preuve de ce que Cai a appelé une compréhension conceptuelle. Dans une situation où l'on cherchait une donnée, la moyenne et les autres données étant connues, ces sujets tentaient d'appliquer directement l'algorithme de calcul au lieu de l'inverser. Selon Gattuso et Mary (1996) ce phénomène se retrouve également chez des élèves plus âgés.

Ces résultats s'accordent avec ceux obtenus par Pollatsek, Lima et Well (1981), avec des étudiants de collège. Parmi 37 collégiens, seulement quatorze ont pu calculer un problème de moyenne pondérée. Les résultats de plusieurs études (Garfield & Ahlgren, 1988; Lappan & Zawojewski, 1988) confirment qu'il y a une prédominance du numérique, de la procédure algorithmique de calcul de la « moyenne, les élèves et même les adultes ayant tendance à répondre en procédant par un processus de broyage de nombres », plaçant des quantités dans une formule sans vraiment saisir le concept ou produire un raisonnement juste. Pollatsek suggère de présenter les problèmes dans différents contextes et différents formats alors que d'autres suggèrent de travailler l'analogie du modèle de balance (Hardiman, Well & Pollatsek, 1984; Mokros & Russell, 1995).

D'autre part, certaines études se sont concentrées sur les propriétés que l'on attribue à la moyenne. Mevarech (1983) relève que les collégiens attribuent à la moyenne les propriétés des opérations arithmétiques (associativité, commutativité, élément neutre, etc.). De plus, le zéro comme dans le cas de la division par 0 et dans le cas de l'exposant 0 semble poser ici encore problème. Si une des données est égale à 0, certains élèves la traitent comme un élément neutre et disent que la moyenne ne change pas. Une fois encore, ce fait se manifeste a differents ages. Strauss et Bichler (1988) dans une étude menée auprès d'enfants de 8 à 14 ans ont noté qu'en plus de ne pas comprendre que la somme des écarts à la moyenne est nulle et que la moyenne est représentative de l'ensemble des valeurs, les élèves ont de la difficulté à tenir compte du zéro dans le calcul de la moyenne.

Dans le cas de la moyenne, on ne peut pas dire, comme pour le score centré réduit $\left(Z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)$ ou la variance, que ce soit la nouveauté du concept qui en explique la difficulté. Au contraire, des conceptions sont déjà présentes, et ce avant tout enseignement, et peuvent interférer avec les concepts qu'on cherche à introduire. On confond souvent la moyenne avec le mode, la valeur la plus fréquente, ou encore on choisit ce qui paraît être la valeur du milieu, une sorte de médiane. Mokros et Russell (1995) dans une étude menée auprès de jeunes enfants de 4$^e$ , 6$^e$ et 8$^e$ années et de leurs professeurs ont décelé chez les sujets cinq sens de la moyenne *(mean)*: le mode, un algorithme, une valeur raisonnable, un point milieu et un point d'équilibre. D'autres encore voient la moyenne comme une valeur habituelle ou typique (Johnson, 1985 voir Garfield & Ahlgren, 1988). Ces conceptions semblent répandues, persistantes et difficiles à changer. À la suite de l'administration de questionnaires et d'entrevues Watson et

Moritz (1999, 2000) proposent un modèle de développement à plusieurs niveaux (Tableau 1) des concepts associés aux mesures de tendance centrale (moyenne, médiane et mode). Ils montrent que le concept de moyenne est de loin le plus difficile. Les concepts de médiane et mode peuvent eux s'appuyer sur les idées intuitives de « *milieu* » et de « *le plus souvent», « le plus courant* ». Ces idées apparaissent fréquemment chez les élèves pour interpréter un énoncé où une mesure de tendance centrale est donnée ou suggérée. Par ailleurs, la flexibilité dans l'utilisation de l'algorithme de moyenne et l'idée de la moyenne comme mesure représentative d'un ensemble de données se développent au fur et à mesure de la scolarité et selon les niveaux proposés en hypothèse. Ainsi une étude longitudinale (Watson & Moritz, 2000) réalisée sur une quarantaine de sujets montre que la plupart des élèves y arrivent. Toutefois, dans l'étude précédente (Watson & Moritz, 1999), pour un problème portant spécifiquement sur la moyenne, seulement 37% des élèves de 11e année (n=164) ont démontré une compréhension relationnelle des différents aspects associés à la mesure et jugés essentiels par les auteurs pour la résolution de problèmes plus complexes (avec inférences). Lors de cette étude sur la compréhension des mesures de tendance centrale, le pourcentage d'élèves de 11$^{e}$ année qui ont atteint un niveau supérieur (R) ne dépasse pas 54%. Ceci fait dire aux auteurs qu'une grande partie des élèves n'ont pas construit l'idée de mesure représentative d'un ensemble de données et n'ont donc pas atteint le niveau suffisant pour passer à des problèmes plus complexes.

*Tableau 1. Modèle de développement des concepts de mesures de tendance centrale selon Watson et Moritz (1999)*

| Niveau | Description en bref |
|---|---|
| P-*préstructural responses* | les élèves ont vraisemblablement entendu le mot mais n'y accordent pas de signification spécifique |
| U-*unistructured responses* | une idée de ce que signifie le mot mais sans référence à un ensemble de données |
| M-*multistructural responses* | une description présentant plusieurs aspects pertinents mais des incohérences subsistent |
| R-*relational responses* | une description montrant une compréhension des relations entre les différents aspects associés à la mesure, construction de l'idée de mesure représentative d'un ensemble de données |

Dans l'étude que nous présentons, nous nous attardons spécifiquement à la relation que les élèves établissent entre les données et la moyenne et dans ce but, nous interrogeons les élèves sur les effets que produit sur la moyenne la modification d'une donnée ou de l'effectif. Avant de présenter le contexte de l'étude et ses objectifs particuliers, il paraît important de dire quelques mots sur la formulation des questions. Plusieurs chercheurs ont montré l'influence du contexte, de l'histoire (dans un problème à texte) ou de la formulation sur le comportement des élèves (Stern & Lehmdorfer, 1992; Cerquetti-Aberkane, 1987). Certains contextes vont donner une signification particulière à l'opération (partage ou groupement pour la division, par exemple) (Bell, Fischbein & Greer, 1984; Semadeni, 1984). L'influence du contexte, notamment des grandeurs impliquées, se fait sentir également dans les problèmes de moyenne (Mary & Gattuso, 2003; Pollatsek, Lima & Well, 1981). Au-delà de l'histoire qui accompagne un problème ou de sa formulation, ce sont les relations impliquées dans le problème, la nature des données et des nombres, la place de l'inconnue dans une équation, etc. qui vont rendre plus ou moins complexe la résolution d'un problème. En particulier, Vergnaud (1996) a montré que des problèmes à structure semblable sur le plan mathématique, donnant lieu à la même équation par exemple, sont traitées de façon très différente par les élèves. Ainsi, dans le champ conceptuel des problèmes à structure additive (Vergnaud, 1996), il identifie des classes de problèmes auxquels sont associés des schèmes de fonctionnement, invariants opératoires pour cette classe de problèmes.

Dans notre étude, nous avons choisi de proposer trois problèmes semblables de moyenne aux élèves, semblables de par la formulation, le contexte mais aussi dans la mesure où l'équation qui leur était associée s'établissait de façon similaire: total initial auquel on ajoute ou retranche une donnée pour diviser le résultat par le nouvel effectif. Certaines expériences individuelles antérieures nous laissaient penser que les élèves ne traitaient pas l'ajout d'une donnée, par exemple, de la même façon que le retrait d'une donnée. C'est ce que confirment les résultats présentés.

## 2. CONTEXTE DE L'ETUDE ET OBJECTIFS

Les résultats qui seront présentés sont issus d'une recherche plus large sur les stratégies de résolution de problèmes de moyenne. Six cent trente huit élèves de 2$^{e}$, 3$^{e}$ et 4$^{e}$ secondaires (14 à 16 ans) d'écoles secondaires de la région de Montréal ont participé à cette étude. Le choix s'est fait selon la disponibilité des enseignants. Ils répondaient à 5, 6 ou 7 questions respectivement selon leur niveau (Gattuso & Mary, 1998, 2001). Il y avait six versions du questionnaire de sorte que tous ne répondaient pas aux mêmes questions, mais les questions étaient toujours présentées dans le même ordre.

Le questionnaire a été présenté par l'enseignant aux élèves qui avaient environ une heure pour y répondre. Il y avait une seule question sur chaque page et les consignes étaient de ne pas revenir en arrière sur les problèmes déjà faits et de ne pas utiliser la calculatrice. Les enseignants étaient avertis de ne donner aucune réponse aux élèves au sujet des problèmes. Dans les groupes de 3$^{e}$ secondaire, les élèves avaient vu la moyenne en classe comme le prévoit le programme scolaire.

Dans cet article, les trois problèmes présentés ont été conçus avec l'intention spécifique de vérifier la capacité que les élèves ont de calculer une moyenne et celle de saisir les liens qu'il y a entre la modification d'une donnée ou de l'effectif et celle de la moyenne. Ils visaient aussi à tester l'influence d'une donnée égale à zéro, influence signalée dans certaines études précédentes. Les résultats de la présente étude font voir comment, dans le contexte des problèmes donnés, le type et le sens des modifications influencent les comportements des élèves et comment des conceptions inadéquates ou des glissements de sens apparaissent dans certaines situations et pas dans d'autres. Soulignons que chaque élève ne répondait qu'à un seule des trois problèmes.

## 3. LES PROBLEMES

Les trois problèmes (Tableau 2) sont formulés semblablement en reprenant la même histoire: des amis qui veulent faire une sortie se vident les poches. Dans les trois cas, la question porte sur le lien entre la moyenne et la modification effectuée. Toutefois, le type et le sens de cette modification varient d'un problème à l'autre.

L'énoncé précise combien les amis ont en moyenne pour la sortie. Puis, une modification de l'effectif et des données survient. Une première question (a) demande d'anticiper l'effet de cette modification sur la moyenne. Trois alternatives sont proposées aux élèves: 1) Elle diminue, 2) Elle demeure inchangée, 3) Elle augmente. Ensuite, que l'élève pense que la moyenne change ou non, une deuxième question (b) lui demande d'évaluer la nouvelle moyenne. Pour chacune des questions posées, l'élève devait expliquer comment ou par quel raisonnement il trouvait sa réponse. Dans les trois problèmes, une donnée égale à zéro est impliquée. Les trois problèmes sont semblables mais, ils sont aussi différents si l'on considère le type et le sens des modifications qui surviennent. Pour le problème 1, on ajoute une donnée égale à zéro car un ami se joint au groupe mais il n'a pas d'argent; donc l'effectif augmente mais le montant total ne change pas. Dans le problème 2, l'effectif reste le même (un ami part et un autre arrive), une donnée non nulle est remplacée par une autre égale à zéro; ce changement entraîne une modification du montant total. Dans le problème 3, on enlève une donnée égale à zéro car un ami part, mais comme il n'a pas d'argent, le montant total reste inchangé. Comme nous allons le montrer, ces différences entraînent des comportements différents chez les élèves.

*Tableau 2. Les trois problèmes*

(1) Ajouter une donnée = 0

Un groupe de sept amis voulant faire une sortie se vident les poches. Ils ont en moyenne 12$ chacun. Jean-Philippe se joint au groupe et n'a pas un sou, qu'arrive-t-il maintenant à la moyenne?

a) 1) Elle diminue 2) Elle demeure inchangée 3) Elle augmente
Écris pourquoi tu obtiens cette réponse.

b) Quelle est-elle?
Écris comment tu obtiens ce résultat.

(2) Remplacer une donnée = 0

Un groupe de huit amis voulant faire une sortie se vident les poches. Ils ont en moyenne 11$ chacun. Pierre après avoir réfléchi reprend les 4$ qu'il avait donné car il doit aller travailler. À ce moment, Jean-Philippe se joint à eux pour la sortie mais il n'a pas un sou, qu'arrive-t-il maintenant à la moyenne?

a) 1) Elle diminue 2) Elle demeure inchangée 3) Elle augmente
Écris pourquoi tu obtiens cette réponse.

b) Quelle est-elle?
Écris comment tu obtiens ce résultat.

(3) Enlever une donnée = 0

Un groupe de neuf amis voulant faire une sortie se vident les poches. Ils ont en moyenne 12$ chacun. Pierre après avoir réfléchi dit qu'il doit aller travailler et quitte le groupe. De toutes façons, il n'avait pas un sou. Qu'arrive-t-il à la moyenne maintenant qu'il a quitté le groupe?

a) 1) Elle diminue 2) Elle demeure inchangée 3) Elle augmente
Écris pourquoi tu obtiens cette réponse.

b) Quelle est-elle?
Écris comment tu obtiens ce résultat.

Nous allons maintenant présenter l'analyse de chacun des problèmes plus en détail ainsi que les résultats pour la question (a), anticipation de l'effet sur la moyenne, et ceux pour la question (b), évaluation de la nouvelle moyenne. Précisons d'abord que 310 élèves ont participé à l'expérimentation, que pour chacune de ces questions, environ cent élèves ont été interrogés et que dans chaque cas on retrouve environ 40% d'élèves de 2$^{e}$ secondaire, 40% d'élèves de 3$^{e}$ secondaire et 20% d'élèves de 4$^{e}$ secondaire. Le tableau 3 présente le nombre d'élèves ayant répondu à chaque problème selon le niveau académique.

*Tableau 3. Nombre d'élèves ayant répondu à chaque problème selon le niveau académique*

| Niveau | (1) Ajouter une donnée = 0 | (2) Remplacer une donnée = 0 | (3) Enlever une donnée = 0 | Total |
|---|---|---|---|---|
| sec. 2 | 40 | 39 | 39 | 118 |
| sec. 3 | 39 | 39 | 41 | 119 |
| sec. 4 | 22 | 26 | 25 | 73 |
| TOTAL | 101 | 104 | 105 | 310 |

## 4. ANTICIPATION DE L'EFFET SUR LA MOYENNE (question a)

### 4.1. ANALYSE DES PROBLEMES A PRIORI

Dans le problème 1, la modification consiste à ajouter une donnée égale à 0: « Jean-Philippe se joint au groupe et n'a pas un sou ». On a alors plus de personnes pour le même montant d'argent ce qui entraîne une diminution de la moyenne. Dans le deuxième problème, la modification consiste à remplacer une donnée non nulle par une autre égale à zéro: « Pierre après avoir réfléchi reprend les 4$ qu'il avait donné car il doit aller travailler. À ce moment, Jean-Philippe se joint à eux pour la sortie mais il n'a pas un sou ». L'effectif ne change pas; seul le total change; il diminue et par conséquent la moyenne aussi. Dans le troisième problème, la modification consiste à enlever une donnée égale à zéro: «Pierre après avoir réfléchi dit qu'il doit aller travailler et quitte le groupe. De toutes façons, il n'avait pas un sou». On a alors moins de personnes pour le même montant d'argent, la moyenne augmente.

Dans les problèmes 1 et 3, les variations de la moyenne sont en sens inverses des effectifs. En effet, puisqu'on ajoute (1) ou enlève (3) une donnée égale à zéro, le total est inchangé. L'effectif augmentant (1) ou diminuant (3) provoque alors respectivement une diminution (1) ou une augmentation (3) de la moyenne. Pour résoudre ces problèmes, aucun calcul n'est nécessaire. De plus, un raisonnement sur l'effectif exclusivement, permet de donner une bonne réponse puisque la donnée ajoutée ou supprimée égale zéro.

Dans le problème 2, il y a deux changements qui surviennent. Envisager l'effet sur la moyenne après chaque changement peut être compliqué: une personne part avec 4$, un montant inférieur à la moyenne (11$), donc la nouvelle moyenne augmente; puis une autre personne arrive sans argent, la moyenne baisse; la question qui se pose alors est: est-ce que la nouvelle moyenne est supérieure ou inférieure à l'ancienne moyenne (11$)? Estimer le résultat de la hausse de moyenne suivie de la baisse demande un calcul des moyennes à chaque étape à moins qu'on ne raisonne sur l'effet que produit la *combinaison* des deux modifications ($-4 + 0 = -4$) sur le total. Dans ce cas comme le total est diminué de 4$ et que l'effectif reste le même, on a alors moins d'argent pour le même nombre de personnes et la moyenne diminue.

Dans tous les cas, on peut répondre sans avoir besoin d'utiliser la formule classique pour calculer la nouvelle moyenne: somme des données divisée par l'effectif. Notons que la différence entre les nombres utilisés dans chacun des problèmes n'est pas très grande; les nombres ont été choisis de manière à simplifier les calculs éventuels.

### 4.2. RESULTATS

Les résultats pour chacun des problèmes sont présentés dans le tableau 4.

*Tableau 4. Réussite aux trois problèmes (question a)*

| Niveau | (1) Ajouter une donnée = 0 | (2) Remplacer une donnée = 0 | (3) Enlever une donnée = 0 | Total |
|---|---|---|---|---|
| | n (%) | n(%) | n(%) | n(%) |
| sec. 2 | 36 (90,00) | 28 (71,79) | 23 (58,97) | 87 (73,73) |
| sec. 3 | 35 (89,74) | 31 (79,49) | 26 (63,41) | 92 (77,31) |
| sec. 4 | 20 (90,91) | 16 (61,54) | 19 (76,00) | 55 (75,34) |
| TOTAL | 91 (90,1) | 75 (72,12) | 68 (64,76) | 234 (75,48) |

Les résultats montrent i) que les élèves réussissent relativement bien à anticiper le changement sur la moyenne, avec au-dessus de 74% de réussite, quel que soit le niveau; ii) que la réussite diffère toutefois selon les versions. Le problème 1 apparaît beaucoup mieux réussi (90% de réussite) que le problème 3 (65% de réussite) (test de différence de proportions: z=4,583; p=0,000). L'impact sur la moyenne de l'ajout d'une donnée égale à zéro apparaît donc plus facile à envisager que celui du retrait d'une donnée égale à zéro. De même, l'ajout d'une donnée égale à zéro se révèle plus facile que le remplacement d'une donnée différente de zéro par une autre égale à zéro (z=3,388; p=0,001)). Pour chacun des problèmes, les résultats ne se distinguent pas selon le niveau de scolarité.

## 4.3. EFFET SUR LA MOYENNE: EXAMEN DES STRATEGIES UTILISEES PAR LES ELEVES

***Procédures de réussite*** Pour le problème 1 (ajout d'une donnée égale à 0), les élèves qui réussissent raisonnent, comme prévu, majoritairement sur l'effectif qui change: il y a le même montant d'argent divisé en plus de personnes (53,5% des élèves).

C'est le cas aussi pour le problème 3 (retrait d'une donnée égale à 0), il y a autant d'argent à répartir en moins de personnes ou simplement il faut diviser par 8 au lieu de par 9 (41,0% des élèves).

Quant au problème 2 (remplacement d'une donnée par 0) les élèves qui réussissent raisonnent majoritairement sur le total qui diminue en mentionnant ou non que l'effectif reste le même (56,8% des élèves): il y a le même nombre de personnes mais moins d'argent au total ou simplement, le total diminue. Une majorité d'élèves semble donc avoir combiné les effets des deux transformations sur le total.

Ces problèmes permettent de centrer l'attention tantôt sur le total, tantôt sur l'effectif, puisqu'une seule de ces variables change.

***Procédures dans le cas de non-réussite*** Considérons maintenant les procédures les plus utilisées dans le cas où les élèves n'ont pas réussi les problèmes. Elles sont présentées dans le tableau 5. Il s'agit de procédures fausses à moins que l'élève n'ait pas répondu ou n'ait pas donné d'explication. Les pourcentages expriment le rapport du nombre d'élèves ayant donnée la réponse sur l'ensemble des élèves à qui a été soumis le problème à chacun des niveaux et au total.

*Tableau 5. Procédures de non réussite (question a)*

| Effet sur la moyenne | (1) Ajouter une donnée = 0 | (2) Remplacer une donnée = 0 | (3) Enlever une donnée = 0 |
|---|---|---|---|
| | n(%) | n(%) | n(%) |
| Procédure de non-réussite la plus fréquente | Rien à signaler | Aucune réponse ou réponse sans explication<br>Sec. 2: 5 (12,8)<br>Sec. 3: 4 (10,3)<br>Sec. 4: 4 (15,4)<br>Total: 13 (12,5) | Conceptions inadéquates<br>Sec. 2: 14 (35,9)<br>Sec. 3: 9 (22,0)<br>Sec. 4: 3 (12,0)<br>Total: 26 (24,8) |

Pour le problème 1, aucune procédure particulière n'attire l'attention, le problème ayant été bien réussi. On constate qu'au problème 2 (remplacement d'une donnée par 0), plusieurs élèves n'ont pas répondu à la question ou n'ont donné aucune explication de leur réponse (12,5%). Les autres procédures erronées pour ce problème sont variées. Pour les élèves de 4$^{e}$ secondaire, les plus faibles (61,5% de réussite contre 79,5% et 71,8% respectivement en 3$^{e}$ et 2$^{e}$ secondaires, tableau 4) plusieurs n'ont rien répondu (aucune réponse) ou n'ont pas donné d'explication (15,4%), mais on trouve aussi, en pourcentage égal, une application de la formule de moyenne arithmétique avec erreur sur l'effectif (15,4% des élèves de 4$^{e}$ secondaire).

Quant au problème 3 (retrait d'une donnée égale à 0), l'analyse des explications données par les élèves aux réponses fausses est éclairante. En effet, les réponses fausses les plus répandues (24,8% des élèves à qui a été soumis la question 3, soit 26/105), peuvent être associées clairement à une mauvaise interprétation de la moyenne que nous considérons dans le classement des réponses comme une conception inadéquate. En fait c'est 81,1% des réponses fausses du problème 3 (26 « conceptions inadéquates » sur 32 réponses fausses) qui sont dans cette catégorie. La première conception identifiée, le zéro neutre, est associée, dans un premier temps, à l'utilisation d'un schème de résolution inapproprié dans le contexte c'est-à-dire, considérer zéro comme un élément neutre, application erronée d'une propriété des groupes, qui se traduit ici par « on enlève une donnée nulle, ça ne change rien à la moyenne ». La deuxième conception, le partage égal, vient d'une généralisation abusive d'une représentation de la moyenne comme résultat d'un partage égal. Nous en donnons des exemples ci-dessous. Ces conceptions inadéquates se manifestent peu au problème 2 (2 élèves) et au problème 1 (3 élèves).

***La première conception identifiée: Le Zéro neutre*** L'influence sur la moyenne d'une donnée égale à zéro a été étudiée dans différentes recherches et est documentée (Mevarech, 1983; Strauss & Bichler, 1988). Dans le même sens que ces auteurs, nous trouvons plusieurs élèves qui semblent penser qu'une donnée nulle n'a pas d'influence sur la moyenne. En effet, au problème 3 (retrait d'une donnée égale à zéro), les deux tiers (17/26) des élèves dont les réponses ont été classées conceptions inadéquates indiquent que la moyenne est inchangée et manifestent dans leur explication une telle conception. Les énoncés de ces élèves sont regroupés autour de l'explication suivante: « Pierre a zéro donc ça ne change rien ».

Voici des exemples d'explications d'élèves qui ont répondu que la moyenne était inchangée.

1. *C'est comme si Pierre n'existait pas.* (2e secondaire)

2. *Parce que Pierre de toutes façons n'avait pas un sou.* (2e secondaire)

3. *Car s'ils avaient 12$ en moyenne mais que Pierre n'avaient rien, alors ça reste 12$.* (2e secondaire)

4. *Puisqu'il n'avait pas un sou, il n'a pas influencé la moyenne donc lorsqu'il est parti, la moyenne n'a pas baissé ni augmenté car Pierre n'y a pas participé.* (3e secondaire)

D'autres exemples, toujours pour la même classe d'énoncés, révèlent toutefois des aspects non mentionnés dans les études antérieures et pouvant interférer dans l'interprétation que les élèves font de la situation et sur leur décision. Ainsi, dans les énoncés 5 à 8, c'est comme si le fait que Pierre n'ait pas un sou l'excluait du calcul de la moyenne ou tout simplement du groupe d'amis dont on connaît la moyenne.

5. *Ici: 12$ pour chacun; parce que Pierre n'avait rien donné, donc la moyenne de 12$ chacun était pour 8 amis donc s'il s'en va ça ne change rien.* (2e secondaire)

6. *Ici, Pierre il n'est pas là, il y a 8 personnes.*
   *(Somme d'argent qui possède en groupe) 96 / 8 (Nombre de personnes).*
   
   $$\begin{array}{l|l} 96 & 8 \\ \hline & 12 \end{array}$$
   
   (3e secondaire)

Dans l'énoncé 5, l'élève considère que la moyenne est établie pour 8 amis puisque Pierre n'y participe pas. Dans l'énoncé 6, la somme totale est correctement établie mais elle est considérée pour 8 personnes et non pour 9. Dans l'énoncé 7 (ci-dessous), l'élève exclut Pierre du groupe de 9 amis et ne considère donc pas que Pierre participe à la moyenne donnée. C'est le cas aussi pour l'énoncé 8.

7. *Pierre n'avait pas d'argent donc ne fait pas partie des 9 amis du groupe car les 9 mettent 12$. Lui n'a pas un sou.* (4e secondaire)

8. *Comme Pierre n'avait pas d'argent, son montant n'a jamais été compté. Par contre sa part de la moyenne sera distribuée de façon égale pour les autres.* (2e secondaire)

   *moyenne générale*

   L'élève pointe avec une flèche l'expression « moyenne générale ». On peut penser que l'élève a voulu signifier que le montant n'avait jamais été compté dans la moyenne générale.

Il pourrait y avoir une question de pertinence. En effet, pourquoi considérer zéro dans la moyenne? En fait, pourrait-on penser que la difficulté ne tiendrait pas tant à une généralisation d'une propriété de l'addition mais à un obstacle épistémologique de même nature que celui envisagé dans l'histoire dans le passage du « rien » à « zéro comme nombre » (Kaplan, 1999)? De plus, au-delà de la difficulté mathématique, il pourrait y avoir ici une influence du contexte social de la situation: on ne partage pas habituellement avec quelqu'un qui n'a pas un sou ou le partage s'effectue entre les personnes qui ont de l'argent: *Pierre n'a pas un sou, il n'existe pas* (6), *il ne fait pas partie du groupe* (7). La formulation du problème a pu aussi jouer dans l'exclusion de Pierre du groupe: « Pierre après avoir réfléchi dit qu'il doit aller travailler et quitte le groupe. De toutes façons, il n'avait pas un sou ». Était-il ou non membre du groupe des neuf? Les énoncés qui suivent suggèrent une autre explication à certaines réponses d'élèves.

9. *Parce que le texte dit qu'ils avaient 12$ chacun mais comme le texte dit que Pierre n'avait pas un sou cela ne change rien à la moyenne.* (4$^{e}$ secondaire)

Dans l'énoncé 9, l'élève réinterprète la situation du problème en évacuant l'expression en moyenne; en réalité le texte dit que les amis « ont en moyenne 12$ chacun » et l'élève interprète qu' « ils avaient 12$ chacun ». Ce glissement peut expliquer divers autres énoncés classés sous l'interprétation « zéro ne change rien » comme 5, 6, 7 et 8 ci-dessus et le suivant:

10. *Pierre=0$*
*9 amis = 12$*    *Avec ou sans Pierre, la moyenne est de 12$/personne.*
*Exemple: 0, 12, 12, 12,12, 12, 12, 12, 12.*

Notons que l'exemple que donne l'élève ne donne pas une moyenne de 12$ pour les 9 amis. Il en conclut tout de même que la moyenne est inchangée. Une moyenne de 12$ par ami est interprétée ici comme « chacun a 12$ » sauf Pierre évidemment qui lui n'a rien.

Nous y voyons ici l'interférence d'une représentation de la moyenne qui peut être utilisée pertinemment pour résoudre des problèmes de moyenne, celle du partage équitable. En effet, lorsque l'on dit une moyenne de 12$ par enfant, on peut comprendre que si la somme totale était répartie également entre les amis, chacun aurait 12$. Les élèves peuvent ne pas en saisir le sens conditionnel, oublier le *si*, ou simplifier à outrance la situation par incapacité à contrôler toutes les variations possibles. Watson et Moritz (2000) observent également une stratégie semblable chez des élèves capables de reconstituer le total mais incapable de construire une distribution respectant une moyenne alors que certaines données sont connues. Dans l'énoncé 9 ci-dessus, la représentation de la moyenne comme « partage équitable » entre en conflit avec le fait qu'une donnée est zéro. La gestion de ce conflit peut mener à exclure la donnée zéro.

***La deuxième conception identifiée: Le partage égal*** Les énoncés précédents illustraient la conception « zéro ne change rien ». Dans les énoncés 9 et 10, nous en avons vu apparaître une autre « tous ont la même chose ». Dans ces cas, seul Pierre n'avait rien, il était exclut du groupe. Cependant, un certain nombre d'autres réponses fausses (8/26) sont aussi accompagnées d'explications de type « tous ont 12$ ». Les énoncés qui suivent sont caractéristiques de cette catégorie.

11. *Elle est inchangée.*

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 9 \\ \hline 108 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 108 \\ -\ 12 \\ \hline 96 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 96 & 8 \\ \cline{2-2} -8 & 12 \\ \cline{1-1} 16 & \\ -16 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

(3$^{e}$ secondaire)

Le total est évalué à 9 x 12 = 108. Ensuite, le total est réduit de 12 pour devenir 96, puis est divisé en 8 puisque Pierre est parti. C'est comme si Pierre partait avec 12$.

12. *Elle diminue.*

*Essai: 5 amis et chacun 12$ mais un a 0$*
*12 + 12 + 12 + 12 + 0 = 48 ÷ 5 ≅ 9,9*
*mais si 4 amis et tout le monde 12$*
*12 + 12 + 12 + 12 = 48 ÷ 4 ≅ 12* (2e secondaire)

Dans l'énoncé 12, l'élève considère le cas où il y a 5 amis. Il calcule d'abord la moyenne en donnant 12$ à chacune des personnes sauf à Pierre qui n'a rien, conformément à l'énoncé du problème. Ensuite, il calcule la moyenne en faisant partir Pierre. Il trouve une moyenne supérieure. L'élève aurait dû conclure que la moyenne augmentait. Toutefois, il a vraisemblablement confondu le 12$ trouvé lors du 2e calcul avec la moyenne du problème initial (qui était de 12$) et conclut qu'elle diminuait en passant à 9,9.

Les deux exemples qui précèdent illustrent un glissement. Comme nous l'avons dit précédemment, nous pouvons comprendre qu'une moyenne de 12$ correspond au montant qu'aurait chacun si le total était partagé également entre les amis. Toutefois, la distinction entre la part fictive qui résulte du partage égal (la moyenne) et une contribution réelle de chacun de 12$ est subtile! L'idée de faire partir Pierre avec 12$ est tentante. Le glissement est facile et est peut-être renforcé ici par le contexte du problème et sa formulation. Dans l'exemple suivant, dont la réponse est juste, l'élève partage un 12$ laissé par Pierre entre les 8 amis. Raisonnement juste ou erroné, la frontière est faible.

13. *Elle augmente.*

*Comme il y a une personne qui s'en va, alors ils vont partager le 12$*
*entre les 8 autres personnes.* (2e secondaire)

La formulation aussi peut induire des conceptions inadéquates. Bien que celle utilisée dans les problèmes « Ils ont en moyenne 12$ chacun» est très couramment employée dans la langue parlée et dans les manuels scolaires, une autre formulation comme « la moyenne des montants qu'ils ont mis en commun est de 12$» aurait peut-être évité certains glissements de sens. Cependant, dans l'énoncé 10, on constate que l'élève exprime bien le « ont en moyenne 12$ chacun » de l'énoncé par «la moyenne est de 12$/personne». Nonobstant cette formulation, une certaine abstraction du concept semble se développer avec l'âge. Ces interprétations inadéquates de la situation sont plus fréquentes en 2e secondaire et paraissent diminuer avec l'âge ou l'enseignement (Cf. tableau 5).

## 5. EVALUATION DE LA NOUVELLE MOYENNE (question b)

### 5.1. ANALYSE DES PROBLEMES A PRIORI

Après avoir demandé aux élèves d'anticiper si la moyenne augmentait, diminuait ou restait inchangée (question a), nous leur avons demandé quelle était la nouvelle moyenne. Ils pouvaient alors recourir à différentes stratégies, telles construire une liste de données ou reconstruire le total initial. Comme expliqué pour la partie (a), il était possible aussi de considérer que la moyenne est le résultat obtenu après partage égal et donc de reconstituer le total en multipliant le résultat du partage par l'effectif. Ce nouveau total pouvait se trouver également algébriquement en posant la somme initiale comme inconnue dans la formule de la moyenne. Une fois le total initial trouvé, il s'agit alors d'évaluer le nouveau total en ajoutant ou enlevant les données et en le redistribuant selon le nouvel effectif.

Si toutefois l'on se base sur la formule usuelle pour évaluer la moyenne, le calcul présente quelques difficultés, puisque dans ces problèmes, les données ne sont pas accessibles directement, seule la moyenne de ces données est connue. Ainsi, pour évaluer la somme des données, il faut savoir que la somme d'argent totale initiale égale le produit de la moyenne par l'effectif. Dans le premier problème, par exemple, si 7 amis ont en moyenne 12$ chacun, ils ont ensemble 7 x 12$. Pour trouver la nouvelle moyenne, il suffit alors d'ajouter ou soustraire la donnée supplémentaire ou la donnée à retirer et de diviser par le nouvel effectif. Ces problèmes peuvent également donner lieu à des résolutions algébriques en posant une équation dont l'inconnue est la somme initiale des données, avant modification de la situation.

## 5.2. RESULTATS

Les résultats à cette question sont présentés dans le tableau 6. Nous pouvons constater que 1) le problème 1 est encore le mieux réussi, 2) que le problème 2 est particulièrement faible (moins de 40% de réussite) et ce même en 4$^e$ secondaire et 3) que le problème 3 est mieux réussi en 4$^e$ secondaire. Dans tous les cas, un test de proportions donne des résultats significatifs.

*Tableau 6. Réussite aux trois problèmes (question b)*

| Niveau | (1) Ajouter une donnée = 0 | (2) Remplacer une donnée = 0 | (3) Enlever une donnée = 0 | Total |
|---|---|---|---|---|
| | n (%) | n (%) | n (%) | n (%) |
| sec. 2 | 34 (85,0) | 18 (47,4) | 19 (48,72) | 71 (60,2) |
| sec. 3 | 29 (74,4) | 12 (30,77) | 17 (41,5) | 58 (48,7) |
| sec. 4 | 20 (90,9) | 10 (38,46) | 18 (72,0) | 48 (65,8) |
| TOTAL | 83 (82,2) | 40 (38,8) | 54 (51,4) | 177 (57,0) |

## 5.3. CALCUL DE LA MOYENNE: EXAMEN DES STRATEGIES UTILISEES PAR LES ELEVES

***Procédures de réussite*** Presque la totalité des procédures de réussite pour chacun de ces problèmes consiste en l'utilisation de ce que nous avons appelé la formule de la moyenne: somme des données divisée par l'effectif. Cette formule peut être appliquée pour reconstituer le total avant de poursuivre (total ÷ effectif = moyenne, donc, total = moyenne × effectif) ou après avoir construit une liste fictive de données. Toutefois, il est à remarquer que quelques élèves (7 élèves) utilisent une procédure très intéressante que nous avons appelée procédure de compensation: on ajuste la moyenne en lui ajoutant ou retranchant une partie, sans passer par le total. Ainsi, dans l'énoncé 14 qui apparaît pour le problème 2, où une donnée (4$) est remplacée par une autre nulle, l'élève enlève à la moyenne la fraction correspondant à la donnée qui part.

14. *Vu que Pierre a enlevé 4$ et qu'il y a 8 personnes dans le groupe, on diminue la moyenne de .50*

*Alors 11.00*
*- .50*
*10.50* (2e secondaire)

Dans le problème 3, où une donnée nulle est enlevée, on voit apparaître une autre stratégie illustrée par les énoncés 15 et 16.

15. *Comme il y a une personne qui s'en va, alors ils vont partager le 12$ entre les 8 personnes.*

16. *12$ réparti sur 8 nouvelles personnes: 13,50$*
(4e secondaire)

Ils attribuent un montant équivalent à la moyenne à Pierre qui part et redistribue ce montant entre les personnes restantes. Cinq élèves font ce raisonnement.

On constate donc que des raisonnements différents apparaissent avec de nouveaux problèmes. De plus, l'analyse du tableau 6 montre que le taux de réussite varie selon les problèmes. La performance des élèves de 4e secondaire est intéressante sur ce plan. En effet, alors qu'ils utilisent beaucoup plus la formule que les élèves des deux autres niveaux au problème 3, ils semblent l'utiliser relativement peu dans le cas du problème 2! Les élèves de 4e secondaire réussissent mieux le problème 3 que les élèves de 2e secondaire (z=1,94; p= 0,061) et ceux de 3e secondaire (z=2,58; p=0,014). Toutefois, pour le problème 2, les élèves de 4e secondaire ne semble pas plus habiles pour évaluer la moyenne que les autres élèves. L'examen des procédures fausses utilisées peut éclairer encore ici.

***Procédures dans le cas de non-réussite*** Dans le tableau 7, sont présentées les procédures les plus fréquentes dans le cas où les élèves n'ont pas réussi le problème. Les pourcentages expriment le rapport du nombre d'élèves ayant donné la réponse sur l'ensemble des élèves à qui a été soumis le problème à chacun des niveaux et au total.

*Tableau 7. Procédures de non réussite (question b)*

| | (1) Ajouter une donnée = 0 | (2) Remplacer une donnée = 0 | (3) Enlever une donnée = 0 |
|---|---|---|---|
| | n (%) | n (%) | n (%) |
| Procédure fausse la plus fréquente | Vides<br>Sec. 2:3 (7,5)<br>Sec. 3: 5 (12,8)<br>Sec. 4: 0 (0)<br>Total: 8 (7,9) | Fausses formules<br>Sec. 2: 6 (15,4)<br>Sec. 3: 8 (20,5)<br>Sec. 4: 6 (23,1)<br>Total: 20 (19,2) | Vides<br>Sec. 2: 4 (10,3)<br>Sec. 3: 10 (24,4)<br>Sec. 4: 1 (4,0)<br>Total: 15 (14,3) |
| 2e procédure fausse la plus fréquente | | Vides<br>Sec. 2: 0 (0)<br>Sec. 3: 13 (33,3)<br>Sec. 4: 4 (15,4)<br>Total: 17 (16,4) | Conceptions inadéquates + Total<br>Sec. 2: 9 (23,1)<br>Sec. 3: 5 (12,2)<br>Sec. 4: 0 (0)<br>Total: 8 (13,3) |

Pour les trois problèmes, et surtout pour les problèmes 2 et 3, qui semblent plus difficiles, on constate beaucoup de réponses *vides* (l'élève n'a rien répondu ou dit qu'il ne sait pas).

Pour le problème 2 (remplacement d'une donnée par 0), le moins bien réussi, la procédure erronée la plus fréquente consiste en *fausses formules*. Nous avons appelé *fausse formule* tout faux calcul qui implique les données et l'effectif; la plupart du temps, il s'agit de la formule avec erreur sur l'effectif (19,2%). Ainsi au problème 2, on retrouve le nouveau total (88\$ - 4\$) divisé tantôt par 7, 9, 10 et 11. Même les élèves de 4$^e$ secondaire qui réussissent assez bien grâce à la formule, semblent avoir plus de difficultés avec le problème 2 (tableau 7). Eux aussi recourent en assez grand nombre à ce que nous avons appelé une fausse formule. C'est comme si, dans ce cas, ils n'arrivaient pas à tenir compte adéquatement des deux changements. Les réponses vides en témoignent également. Les deux procédures suivantes ont été classées fausses formules.

17. $7 \times 11 = 77$ $\quad$ $77 \div 7 = 11$ $\quad$ $\begin{array}{l} 7 : 11\$ \\ 1 : 7\$ \\ 1 : 0 \\ \hline 9 : 84 \\ 84 \div 9 = 9{,}3\$ \end{array}$

(problème 2, 4$^e$ secondaire)

Pour les trois problèmes, et surtout pour les problèmes 2 et 3, qui semblent plus difficiles, on constate beaucoup de réponses *vides* (l'élève n'a rien répondu ou dit qu'il ne sait pas).

Dans l'énoncé 17, l'élève a considéré sept données égales à 11, une donnée égale à 7, vraisemblablement parce que le total devait être 4 de moins que l'ancien lorsqu'un ami part, puis une donnée égale à 0 pour le nouveau venu. En procédant ainsi, il se trouve à créer une donnée supplémentaire. En effet, huit personnes ont 84\$ et non neuf. Douze élèves ont ainsi divisé le total de 84\$ par 9. La procédure 17 pourrait expliquer cette erreur sur l'effectif. L'énoncé 18 est un autre exemple de fausse formule.

18. *Elle est de 12 car en moyenne ils avaient en tout (8 × 11) = 88\$ maintenant 84 et 7 amis 84/7=12\$.*

(problème 2, 4$^e$ secondaire)

C'est comme si l'élève avait oublié de considérer le nouvel arrivé, à moins que le fait qu'il n'ait rien, l'exclut du calcul, comme nous l'avons vu au problème 3 (a).

Pour le problème 3 (b) (retrait d'une donnée égale à 0), plusieurs élèves n'ont rien répondu ou ont répondu qu'ils ne savaient pas (« ? » ou « je ne sais pas »). Outre ces réponses, à la question b comme à la question a, nous retrouvons la manifestation d'une mauvaise interprétation de la moyenne (*conception inadéquate*): on considère un total de 96\$ comme si le 12\$ de moyenne était seulement pour les huit amis, Pierre ne changeant rien à la moyenne, puisqu'il avait zéro, ou comme si tous se trouvaient avec 12\$ donc Pierre partant, il y a un 12\$ de moins.

19. *Ils sont 8, Pierre étant parti.*
*12\$ × 8 amis = 96\$ / 8 = 12\$*

(problème 3, 2$^e$ secondaire)

En plus des énoncés classés comme *conceptions inadéquates*, nous retrouvons un certain nombre d'énoncés classés *Total* qui révèlent aussi une mauvaise interprétation de la moyenne. Pour les problèmes 2 et 3, plusieurs élèves donnent comme moyenne la somme des données correspondant au total initial ou au total après changement. Ces réponses apparaissent surtout au problème 2 (10,6%) et, moindrement au problème 3 (5,8%). En voici un exemple.

20. *S'ils sont 8 amis et ont en moyenne 11$ chacun, donc tous ensemble auront un montant d'à peu près 88$. Si Pierre prend 4$, ils leur resteront en moyenne 84$.* (problème 2, 4e secondaire)

Cette explication de l'élève pour sa réponse au problème 2 fait apparaître un nouvel élément qui permet d'interpréter autrement les réponses des élèves qui indiquent au problème 3 que la moyenne est inchangée; en fait c'est le total qui est inchangé. Ceci est plus fort en 2e secondaire (18,0% pour le problème 2 et 15,4% pour le problème 3). Il pourrait y avoir ici un glissement provenant de l'expérience des notes à l'école au Québec, où on appelle souvent moyenne la somme des notes accumulées. L'exemple 20 ci-dessus, comme le 8 dans la partie a, nous laisse penser que pour les élèves il y a la moyenne par personne et une moyenne générale pour le groupe exprimée par le total. De plus, dans environ la moitié des cas d'élèves qui répondent par un *total*, nous observons la manifestation des conceptions mentionnées plus haut « tous ont la moyenne » ou « zéro ne change rien », qui se superposent à la confusion total – moyenne. L'énoncé 20 en est un exemple.

On pourrait alors ajouter les cas classés *Total* à ceux classés *conceptions inadéquates* et ainsi, une interprétation inadéquate de la moyenne deviendrait la principale explication des erreurs pour le problème 3 comme pour la question a. Notons que ne sont pas considérés ici les élèves (3,4%) ayant reconduit leur réponse de a) (la moyenne ne change pas) sans ajouter d'explication supplémentaire.

## 6. DISCUSSION

Les problèmes 1 et 3 sont semblables, dans le premier cas, on ajoute une donnée ce qui fait diminuer la moyenne, dans le deuxième cas, on retranche une donnée ce qui fait augmenter la moyenne. On pouvait s'attendre à des comportements semblables chez les élèves. Le problème 2, impliquant deux modifications, le retrait et l'ajout d'une donnée, pouvait être plus difficile. Nous avons en effet observé des procédures de réussite semblables pour les problèmes 1 et 3 lorsque nous avons demandé d'anticiper l'effet sur la moyenne d'une modification de l'effectif. Les réponses des élèves mettent alors l'accent principalement sur l'effectif qui change. Pour le problème 2 (remplacement d'une donnée par 0), les réponses des élèves mettent l'accent sur le total qui change. Lors du calcul de la moyenne en (b) la procédure de réussite est dans tous les cas l'utilisation de la formule : somme des données sur l'effectif.

Cependant, lorsque nous faisons l'examen des procédures dans le cas de non-réussite, les problèmes font apparaître des procédures différentes et un degré de difficulté apparemment différent.

Le problème 3 (retrait d'une donnée égale à 0) s'est révélé plus difficile que les autres exposant des *conceptions inadéquates: «* zéro ne change rien », « tous ont 12$ ». Dans le problème 1 (ajout d'une donnée égale à 0), si on applique la conception « tous ont 12 », on a 7 amis à 12$ chacun, on obtient un total de 7 × 12$ = 84$, ce qui est correct. Parce que Pierre arrive par la suite, il semble que l'on soit moins tenté de lui attribuer un montant de 12$ que tous ont. On arrive donc à la bonne réponse. Dans le problème 3, le fait que le zéro soit une des données de départ semble rendre difficile le retrait. Si on applique la conception « tous ont 12 », on a neuf amis à 12$ chacun, on obtient un total de 9 × 12$=108$. Lorsque l'un des amis part, la question se pose: il part avec combien? (1) S'il part avec 0$, ce qu'il avait au départ, que fait-on de son 12$ étant donné que « tous ont 12$ » ? Il peut être distribué aux personnes restantes (12/8); peu d'élèves utilisent cette alternative. (2) S'il part avec 12$, la moyenne reste inchangée. On arrive donc à une mauvaise réponse. On peut donc considérer que la conception est inadéquate dans ce cas et c'est pourquoi elle se révèle plus souvent dans les réponses au problème 3. Considérer la moyenne comme le résultat d'un partage égal de la somme, donc que tous ont un montant équivalent à la moyenne, est une conception utile qui permet de résoudre facilement plusieurs problèmes de moyenne. Dans le problème 3, cette représentation de la moyenne provoque manifestement un glissement: le 12$ devenant une somme attachée à la personne et non une somme fictive en cas de partage égal.

Quant au zéro neutre, la conception « zéro ne change rien » pouvait conduire à dire que la nouvelle donnée ou la donnée retranchée étant nulle, elles ne changeaient rien à la moyenne. Dans le problème 1, seulement un élève a donné une telle réponse. La généralisation de la propriété du zéro neutre ou l'obstacle épistémologique ou l'influence sociale du contexte, dont nous avons parlé plus tôt, ne se sont donc pas manifestés, s'ils existent, dans le problème 1. Dans ce problème (1), la donnée nulle étant ajoutée après, il était clair qu'elle n'intervenait pas dans la moyenne initiale. Dans le problème 3, le fait que le zéro soit une des données de départ peut avoir conduit à se demander si Pierre avait été compté ou non dans le calcul de cette moyenne. En effet, certains énoncés révèlent que Pierre qui avait 0$ est exclu du calcul de la moyenne conduisant ainsi à une réponse fausse. De plus, dans le problème 2, la donnée « zéro » entre en conflit avec la conception « tous ont 12 », ce qui n'est pas le cas dans le problème 1 puisque la donnée « zéro » n'en est pas une de la distribution de départ. N'est-ce qu'une question de formulation ou de contexte? Il serait pertinent de vérifier cette différence entre les problèmes 1 (ajout d'une donnée) et 3 (retrait d'une donnée) dans d'autres contextes. Nous pensons que le comportement n'est pas seulement dû au fait que la donnée soit « zéro » mais aussi au fait que cette donnée différente de la moyenne entre en conflit avec des conceptions inadéquates de la moyenne.

Le problème 2 (remplacement d'une donnée par 0), par ailleurs, a fait apparaître une confusion entre le total et la moyenne. Comme dans ce problème, le total change, c'est sur ce total que l'accent est mis dans les procédures de réussite en (a). On peut alors comprendre que ce même accent se note dans certaines procédures erronées.

Ces résultats différents pour des problèmes semblables montrent l'importance de soumettre les élèves à des problèmes variés. L'influence des grandeurs en jeu peut favoriser certains raisonnements; ainsi, dans Mary et Gattuso (2003), nous avons fait l'hypothèse que le meilleur taux de réussite obtenu à un problème de poids, comparativement à un problème d'âge et à un problème de notes, pouvait s'expliquer par le sens que prend le total (la somme des poids dans un ascenseur a un sens, une pertinence, tandis que la somme des âges d'un groupe de personnes dans un autobus n'en a pas). Dans les problèmes discutés dans cet article, le contexte de partage était particulièrement propice à un raisonnement sur le total. Toutefois, nos résultats différents pour des problèmes de même contexte montrent bien l'importance de varier aussi la structure des problèmes de manière à confronter certaines conceptions qui pourraient apparaître dans une situation et pas dans l'autre et à prévenir des glissements de sens.

Sur un autre plan, l'influence du contexte de partage a pu être favorable à certaines stratégies adéquates d'égalisation des données, mais a pu aussi permettre l'apparition de stratégies inadéquates. Ainsi, s'il peut être intéressant d'appuyer une approche d'enseignement sur une représentation commune de la moyenne, par exemple celle de l'égalisation des données ou de partage égal *(la moyenne est la valeur qu'aurait chacune des données si on répartissait également le total des données),* les résultats obtenus ici *appellent* toutefois *à une certaine vigilance*.

Ces résultats laissent penser aussi que les *conceptions inadéquates* et glissements diminuent avec les années. C'est rassurant! Si les élèves de 2$^e$ secondaire recourent davantage à ces conceptions que les élèves de 4$^e$ secondaire, c'est sans doute qu'ils sont plus près du contexte et plus influencés par celui-ci que les élèves de 4$^e$ secondaire. Ces derniers utilisent beaucoup plus la *formule* dans le calcul de la moyenne (procédure gagnante) que les élèves des deux autres niveaux. Par contre, ils ne sont pas plus habiles pour évaluer une moyenne lorsque les informations se complexifient (problème 2). Ces résultats montrent les difficultés qui peuvent survenir lorsque des élèves collent *au sens contextuel* (en 2$^e$ secondaire) mais aussi les difficultés d'application correcte de la formule étant donné le contexte (4$^e$ secondaire). Il ne s'agit donc pas de privilégier l'utilisation d'algorithme sous prétexte d'éviter des glissements. Plusieurs auteurs ont montré les limites de cette représentation algorithmique de la moyenne (Cai, 1995; Garfield & Ahlgren, 1988; Lappan & Zawojewski, 1988). Il apparaît important de faire réfléchir les élèves sur les liens entre chacun des éléments impliqués (effectif, données, total, moyenne) et sur l'effet sur les autres de modifier l'un ou l'autre. Comme dit précédemment, cette relation peut être plus immédiate dans certaines situations que dans d'autres.

Dans les problèmes 2 et 3, la relation entre les données, l'effectif et la moyenne apparaît difficile à reconstituer pour les élèves. Les taux de réussite sont peu élevés. Ces problèmes pourraient être considérés comme de bons indicateurs pour évaluer le niveau de compréhension des élèves dans la perspective développementale de Watson et Moritz (1999). Cependant, nous ne retrouvons pas la progression des pourcentages de réussite selon l'âge qui pourraient être attendue pour le problème 2. Nos résultats mettent davantage en lumière les différences selon la structure des problèmes. Toutefois, certaines observations concernant le problème 3(b), telles la diminution du recours à des conceptions inadéquates avec l'âge et l'augmentation des procédures de réussite de type formule permettent de comprendre l'évolution des élèves sous l'influence des nouveaux savoirs enseignés et des nouvelles habiletés de raisonnement dont ils disposent. Ceci nous fait dire, qu'il est important de faire en sorte que les stratégies différentes soient confrontées de manière justement à faire le lien entre certaines plus primitives qui sont adéquates mais qui peuvent provoquer des glissements et d'autres plus sophistiquées mais dont le sens échappe parfois.

## 7. CONCLUSION

Pour cette étude, les données ont été recueillies à l'aide d'un questionnaire écrit. Bien que cette méthode ait l'avantage d'atteindre un plus grand nombre de sujets, elle comporte ses difficultés. La première et non la moindre, est celle de la formulation des questions. De plus, la réponse écrite est souvent moins révélatrice d'informations sur les raisonnements du sujet qu'une réponse qui peut s'expliquer en entrevue.

Malgré tout, les résultats sont intéressants et il faudra en tenir compte dans l'enseignement. À l'école, on met souvent l'accent sur la formule. Un traitement global des liens entre l'effectif, le total et la moyenne, par anticipation des effets d'une modification de l'un ou l'autre de ces éléments, nous apparaissait particulièrement intéressants pour développer chez les élèves le sens de la moyenne comme mesure représentative d'une distribution. Les élèves ne sont pas démunis devant ces anticipations. Comme nous l'avons vu, ils utilisent un certain nombre de stratégies pour anticiper l'effet d'une modification et réussissent dans une assez bonne proportion. Par exemple, une majorité d'élèves semble avoir combiné les effets de deux transformations sur le total pour évaluer l'effet sur la nouvelle moyenne. Il paraît pertinent d'exploiter ce type de raisonnement puisqu'il est utilisé par les élèves et qu'il semble productif. Prendre comme point de départ les anticipations et stratégies des élèves peut être l'occasion d'une discussion fructueuse pour une meilleure compréhension de la moyenne et pour affronter les conceptions inadéquates latentes dans l'esprit des élèves. Par ailleurs, comme nous l'avons développé dans cet article, les différences de comportement observées chez les élèves, selon les problèmes, demandent de varier les modifications effectuées justement pour que ces conceptions latentes se manifestent.

## REFERENCES

Bell, A., Fischbein, R., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15,* 129-147.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm: Students' understanding of the arithmetic average concept. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 144-151). Pernambuco, Brazil: Universidade Federal de Permanbuco.

Cerquetti-Aberkane, F. (1987). Des erreurs et des maîtres. Les erreurs des élèves trouvent souvent leur source chez les enseignants. *Prospectives,* octobre, 120.

Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics, 19,* 44-63.

Gattuso, L., & Mary, C. (1996). Development of concepts of the arithmetic average from high school to university. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 401-408). Valenzia, Spain.

Gattuso, L., & Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school children. In L. Pereira-Mendoza, L. S. Kea, T. W. Kee & W-K. Wong (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 685-692). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Gattuso, L., & Mary, C. (2001). Pupils perception of the links between data and their arithmetic average. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 25-32). The Netherlands: Utrecht University.

Hardiman, P., Well, A., & Pollatsek, A. (1984). Usefulness of a balance model in understanding the mean. *Journal of Educational Psychology*, *76*(5), 792-801.

Kaplan, R. (1999). *The nothing that is a natural history of zero*. New York: Oxford University Press.

Lappan, G., & Zawojewski, J. (1988). Teaching statistics: Mean, median, and mode. *Arithmetic Teacher*, *March 88*, 25-26.

Lavoie, P., & Gattuso, L. (1998). An historical exploration of the concept of average. In L. Pereira-Mendoza, L. S. Kea, T. W. Kee & W-K. Wong (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1051-1058). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Leon, M., & Zawojewski, J. (1990). Use of arithmetic mean: An investigation of four properties issues and preliminary results. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of Third International Conference on Teaching Statistics Vol. 1: School and General Issues* (pp. 302-306). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Mary, C., & Gattuso, L. (2003). L'influence des grandeurs impliquées sur la résolution d'un problème de moyenne. *Communication dans le cadre du colloque EMF 2003*, Tozeur, Tunisie, décembre, 2003.

Mevarech, Z.R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 415-429.

Mokros, J., & Russell, S. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20-39.

Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A.D. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 191-204.

Semadeni, Z. (1984). A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 379-395.

Stern, E., & Lehmdorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development, 7*, 259-268.

Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education, 19,* 64-80.

Vergnaud, G. (1996). La théorie des camps conceptuels. In J. Brun (Ed.), *Didactique des mathématiques* (pp. 197-242). Lausanne: Delachaux et Niestlé.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1999). The development of concepts of average. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(4), 15-39.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1 & 2), 11-50.

CLAUDINE MARY
Département d'études sur l'adaptation scolaire et sociale
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, J1K 2R1
Canada